Большая хурма

Для начала заметим две полезные вещи:

- Максимизировать сумму взятых элементов, это то же самое, что максимизировать разность между тем, что взял ты, и что взял твой оппонент.

- Пока на столе есть ещё хотя бы один кусочек, оба человека съели одинаковое количество, то есть разность между ними равна нулю.

Для начала решим задачу за $O(n^2 \cdot \max\limits_i(w_i))$, используя динамическое программирование:

Обозначим dp[l][r][dif] = разность между тем, сколько возмет первый и тем, сколько возьмет второй, если будут играть на отрезке элементов [l, r], при чем первый начнет есть через dif секунд, после второго (dif может быть отрицательным)

Тогда база динамики: dp[i][i-1][dif] = 0, и ответ лежит в dp[0][n-1][0]

От знака dif зависит, кто будет первым принимать решение о том, какой кусочек взять. Таким образом пересчеты:

Для dif $\leqslant$ 0: dp[l][r][dif] = max из

- $dp[l+1][r][dif + w[l]] + w[l]$

- $dp[l][r-1][dif + w[r]] + w[r]$

Для для dif $>$ 0: dp[l][r][dif] = min из

- $dp[l+1][r][dif - w[l]] - w[l]$

- $dp[l][r-1][dif - w[r]] - w[r]$

В такой динамике |dif| $\leqslant \max\limits_i(w_i)$, то есть всего $O(n^2 \cdot \max\limits_i(w_i))$ состояний и по 2 перехода из каждого.

Чтобы решить подгруппы с ограничением $w_{i+1} \leqslant 2 \cdot w_i$ докажем следующий факт: в таких ограничениях, для любого достижимого состояния (l, r, dif) выполнено |dif| $\leqslant w_{r+1}$, (исключение: если $r = n-1$, то |dif| $\leqslant w_{n-2}$)

Чтобы это доказать, заметим, что при любом переходе dif меняется в сторону нуля, то есть его модуль либо уменьшается, либо становится не больше, чем w_i (где w_i - последний взятый кусочек). Таким образом, при переходах [l, r] $\to$ [l+1, r] соотношение сохраняется в любом случае, а при переходе [l, r] $\to$ [l, r-1] сохраняется, так как $w_{r+1} \leqslant 2 \cdot w_r$

Таким образом, для каждого l существует всего $O(\sum\limits_{i=0}^{n-1} w_i) = O(W)$ достижимых пар r, dif, то есть всего $O(n \cdot W)$ состояний, и два перехода из каждого.

Теперь, чтобы решить полную задачу, поменяем переходы в динамике так, чтобы они сохраняли соотношение |dif| $\leqslant w_{r+1}$

Для этого заметим, что если один человек взял несколько кусочков до передачи хода оппоненту, он всегда мог это сделать, сначала взяв самые маленькие кусочки, а затем самые большие. В связи с этим, оставим переход [l, r] $\to$ [l+1, r], так как они сохраняют инвариант, а вместо переходов [l, r] $\to$ [l, r-1], добавим переходы [l, r, dif] $\to$ [l, r', dif'], то есть возьмем столько наибольших элементов, чтобы ход перешел оппоненту, или игра закончилась.

Такие переходы сохраняют инвариант |dif| $\leqslant w_{r+1}$, то есть в такой динамике $O(n \cdot W)$ состояний, и всё ещё два перехода из каждого.

Заметим так же, что значения r' зависят только от r и dif, но не от l, то есть их можно насчитать за $O(W \cdot \log(n))$.

Полученное решение работает за $O(n \cdot W)$, чего достаточно, чтобы пройти все тесты.