,

Разбор задачи «Параллельные вселенные»

Назовём граф, который надо сделать связным первым, а граф, связность которого нельзя нарушать, вторым.

Предположим, что второй граф содержит ребро (v, u) такое, что вершины v и u лежат в одной компоненте связности первого графа. Тогда рассмотрим любую вершину a лежащую в другой компоненте связности первого графа. Заметим, что одна из операций (v, a) и (u, a) не нарушает связность второго графа. Таким образом, можно сделать одну операцию так, чтобы компонента вершины a объединилась с компонентой вершин v и u, что позволяет решить задачу.

Теперь заметим, что если существует пара вершин v и u, что в обоих графах нет ребра (v, u), то можно сделать операцию с этой парой вершин, после чего задача сведётся к предыдущему случаю.

Если такого ребра тоже не нашлось, то все компоненты связности первого графа — клики, а второй граф содержит все рёбра, которых нет в первом графе.

Теперь выделим любую компоненту связности первого графа, размер которой не меньше 2 (если такой нет, то сделаем операцию с любой парой вершин, после чего такая компонента связности появится). Выделим в этой компоненте связности произвольные вершины a и b. Кроме этого из всех других компонент связности первого графа выделим по одной вершине $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k$.

Заметим, что если первый граф содержит хотя бы три компоненты связности или каждая компонента связности имеет размер хотя бы 2, то подойдёт такая последовательность операций: $(a, v_1),\ (b, v_2),\ (b, v_3),\ \ldots,\ (b, v_k)$.

Если это не так, то первый граф содержит изолированную вершину c, в то время, как все остальные вершины образуют клюку. Второй граф в этом случае имеет вид звезды. В этом случае, если $n = 3$, то ответа нет, а иначе можно выбрать любую пару вершин a и b отличных от c и сделать две операции (a, b) и (a, c).

Это позволяет решать задачу за $\mathcal{O}(n + m_1 + m_2)$ или $\mathcal{O}\left((n + m_1 + m_2)\log(m_1 + m_2)\right)$ в зависимости от реализации.