Сильная связность наносит ответный удар

Авторы задачи: Роман Первутинский, Денис Мустафин
Разработчик задачи: Роман Первутинский

Подгруппа 1

Для каждого подмножества рёбер проверим, поменяются ли КСС, если развернуть лежащие в нём рёбра. Хорошее подмножество не содержит подмножеств, для которых КСС не поменяются. Для каждого подмножества проверим, является ли оно хорошим, перебрав все его подмножества. С поиском КСС алгоритмом Тарьяна или Косарайю получаем решение за $O(3^m + 2^m \cdot m)$.

Подгруппа 2

Для каждого множества нам нужно проверить, содержит ли оно одно из «плохих» подмножеств. Воспользуемся ДП по подмножествам:

$$\text{is\_good}[S] = \neg\text{can\_reverse}[S] \wedge \bigwedge_{e \in S} \text{is\_good}[S \setminus \{e\}]$$

Итого получаем решение за $O(2^m \cdot m)$.

Подгруппы 3, 4 (ациклический граф)

Рассмотрим некоторое ребро $e = (u, v)$. Если не существует другого пути из u в v, e можно развернуть, и граф останется ациклическим. Таким образом, e не может лежать в хорошем множестве.

Пусть теперь существует другой путь из u в v. Тогда мы можем восстановить направление e из направлений рёбер на этом пути, то есть направление на самом e можно стереть. Множество из всех таких рёбер e — хорошее. Это множество является единственным максимальным.

Чтобы проверить существование пути, не проходящего через ребро, удалим ребро из графа и запустим поиск в ширину. Итого получаем решение за $O(m^2)$.

Подгруппа 5 (гамильтонов цикл)

Назовём все рёбра, не лежащие на гамильтоновом цикле, *прямыми*. Поскольку при их развороте сильная связность графа не нарушается, они не могут лежать в хорошем множестве.

Прямые рёбра покрывают некоторые отрезки цикла. Рассмотрим пересечение нескольких таких отрезков (возможно, не связное, поскольку отрезки циклические). Утверждение: все рёбра цикла, принадлежащие этому пересечению, можно развернуть, и граф останется сильно связным.

Таким образом, хотя бы одно ребро цикла на пересечении отрезков должно не лежать в хорошем множестве. Заметим, что если мы можем взять ещё один отрезок в наше пересечение, и оно уменьшится, мы получим более сильное условие. При этом «минимальные» пересечения, которые больше нельзя уменьшить, не пересекаются.

Выберем на каждом минимальном пересечении некоторое ребро, и возьмём множество из всех рёбер, кроме прямых и выбранных. Почему оно будет хорошим? Поскольку пересечения минимальны, в графе их рёбра образуют цепочки между вершинами степени 2. Поскольку в итоговом графе не должно быть стоков и истоков, направления на всех рёбрах цепочки воостанавливаются однозначно.

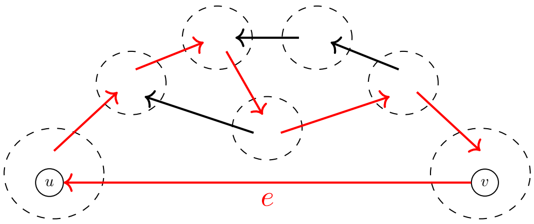
Полученное множество будет максимальным хорошим. Количество способов — произведение размеров минимальных пересечений.

Подгруппа 6 (сильно связный граф)

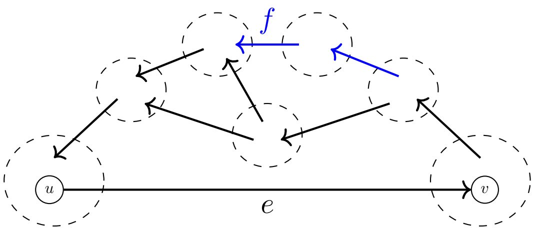
Обобщим идею «минимальных» множеств, которые не должны полностью лежать в хорошем, на общий случай.

Рассмотрим ребро $e = (u, v)$. Опять, если при его удалении граф останется сильно связным, e не может лежать в хорошем множестве. Иначе при развороте e граф распадётся на несколько КСС. Назовём множество рёбер, принадлежащих конденсации, $S(e)$ ($e \in S(e)$).

Пусть мы развернули e и хотим развернуть ещё некоторое подмножество рёбер, чтобы граф остался сильно связным. Мы обязаны развернуть некоторое подмножество $S(e)$, чтобы появился путь из u в v.



Заметим, что если $f \in S(e)$, то $S(f) \subseteq S(e)$. Если $S(f) = S(e)$ для всех $f \in S(e)$, то рёбра в $S(e)$ образуют цикл в конденсации. Назовём такое $S(e)$ *нужным* — это эквивалент «минимального» множества из прошлого решения.



Рассмотрим некоторое множество рёбер, которое можно развернуть, и граф останется сильно связным. Пусть e — ребро из этого множества с минимальным $S(e)$. Тогда $S(e)$ — нужное. Действительно, пусть это не так, тогда существует такое ребро $f \in S(e)$, что существует путь из v в u в графе конденсации, не проходящий через f. Тогда $S(f) \subset S(e)$; противоречие.

Поскольку $S(e)$ образует цикл, $S(e)$ целиком лежит в рассматриваемом множестве. Поэтому любое множество рёбер, которое можно развернуть без нарушения сильной связности, содержит какое-то нужное.

При этом можно развернуть само $S(e)$, чтобы граф остался сильно связным. Таким образом, A хорошее $\iff$ A не содержит ни одно нужное $S(e)$.

Для этого нам нужно не взять в A по одному ребру из каждого нужного множества. Поскольку они не пересекаются, сделать это можно как угодно. Максимальное хорошее множество состоит из всех рёбер, кроме не влияющих на сильную связность и выбранных из нужных множеств. Количество способов — произведение размеров нужных множеств.

Полное решение

Решим задачу отдельно для каждой КСС и для графа конденсации. В графе конденсации может быть несколько рёбер, соединяющих две КСС; из них мы должны не взять в хорошее множество одно любое. При этом домножим ответ на их количество.

Итоговое решение работает за $O(m^2)$.

Решение на частичные баллы

Из полного решения следует интересный факт: любое хорошее множество лежит в некотором максимальном хорошем. Это позволяет написать следующее жадное решение:

Пусть мы уже выбрали некоторое хорошее множество. Теперь мы хотим понять, можно ли добавить в него ещё какое-то ребро. В каком случае мы не можем этого сделать? В том, когда можно развернуть наше ребро и ещё какое-то подмножество уже стёртых, сохранив сильную связность.

Как уже сказано выше, если после разворота нашего ребра (u, v) перестанет существовать путь из u в v, то нам нужно развернуть какие-то ребра из уже взятого множества, чтобы этот путь появился. Проверить, можно ли это сделать, мы можем, ища путь из u в v в графе, где для каждого стёртого ребра мы добавили развёрнутое.

Если такого пути нет, то ребро (u, v) можно стереть. Почему, если такой путь существует, мы не можем это сделать? Утверждается, что после разворота ребра (u, v) и рёбер на найдённом пути граф останется сильно связным. Действительно, мы получили цикл из этого пути и развернутого ребра (v, u). Для всех рёбер, которые мы развернули на этом пути, достижимость между концами ребра осталась, поскольку все вершины на цикле достижимы друг из друга.

Рассмотрев все рёбра графа в любом порядке, мы построим некоторое максимальное хорошее множество.